ΠΡΟΤΑΣΗ

Το πολυώνυμο $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha\,\beta\,\delta\neq 0$ αναλύεται σε γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων, ενός διωνύμου και ενός τριωνύμου, αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη: $\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon+\dfrac{\delta}{\beta}\alpha=\gamma$ (συνθήκη *ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ*)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ευθύ Έστω $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\left(\kappa\chi^2+\lambda\right)\cdot\left(\mu\chi^2+\nu\chi+\tau\right)\Leftrightarrow$

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\kappa\mu\chi^4+\kappa\nu\chi^3+\left(\kappa\tau+\lambda\mu\right)\chi^2+\lambda\nu\chi+\lambda\tau\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=\kappa\mu\\ \beta=\kappa\nu\\ \gamma=\kappa\tau+\lambda\mu\\ \delta=\lambda\nu\\ \varepsilon=\lambda\tau\end{array}\right. \quad \overset{\alpha\beta\delta\neq0}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}\kappa\,\tau=\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon\\ \lambda\,\mu=\dfrac{\delta}{\beta}\alpha\\ \gamma=\kappa\tau+\lambda\mu\end{array}\right. \quad\Rightarrow\ \gamma=\frac{\beta}{\delta}\,\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\,\alpha$$

Αντιστρόφως αν $\gamma=\dfrac{\beta}{\delta}\varepsilon+\dfrac{\delta}{\beta}\alpha$ τότε

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\left(\frac{\beta}{\delta}\,\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\,\alpha\right)\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=$$

$$=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\left(\frac{\beta}{\delta}\,\varepsilon+\frac{\delta}{\beta}\,\alpha\right)\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\frac{\beta}{\delta}\,\varepsilon\,\chi^2+\frac{\delta}{\beta}\,\alpha\,\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{\delta}\chi^2\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)+\frac{1}{\beta}\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)=\left(\delta\alpha\,\chi^2+\delta\beta\,\chi+\varepsilon\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{\delta}\chi^2+\frac{1}{\beta}\right)$$

Παράδειγμα

$$\frac{-21}{14}(-8)+\frac{14}{-21}6=12-4=8$$

$$6\chi^4-21\chi^3+8\chi^2+14\chi-8=$$
$$=6\chi^4-21\chi^3+12\chi^2-4\chi^2+14\chi-8=$$
$$=3\chi^2\left(2\chi^2-7\chi+4\right)-2\left(2\chi^2-7\chi+4\right)\;=\;\left(2\chi^2-7\chi+4\right)\left(3\chi^2-2\right)$$

Παρατήρηση: *Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές*